

Erste Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Schule\*

Roland Fischer, Klagenfurt

0. Grundgedanken eines Vorschlages für eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Eine selbstverständliche unabdingbare Forderung an jede Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung muß die nach der Entwicklung eines adäquaten Wahrscheinlichkeitsbegriffes, inklusive seiner Bezüge zur Realität, sein. Der Erfüllung dieser Forderung wirkt allerdings in der Unterrichtspraxis (der Schule und Hochschule) einiges entgegen.

So glaube ich, daß in manchen Kursen zu früh ein innermathematischer Wahrscheinlichkeitsbegriff angestrebt wird. Nicht unbedingt nur im Sinne des KOLMOGOROWschen Axiomensystems, aber z.B. als beliebige "Gewichtsverteilung" oder auch nur (im ersten Anlauf) als Gleichverteilung auf endlichen Mengen. Was dabei herauskommt, ist eine kombinatorische Theorie der Glücksspiele oder - auf der Hochschule - eine Theorie normierter BOOLEscher Maß-Algebren. In jedem Fall handelt es sich um eine reduktionistische Vorgangsweise (Vgl. [Stegmüller 1973]). D.h. Wahrscheinlichkeitstheorie wird auf eine andere Theorie zurückgeführt, insbesondere auf Kombinatorik oder Maßtheorie. Dagegen erheben immer mehr Stochastiker die Forderung, daß das sogenannte "stochastische Denken" geschult werde, und zwar möglichst früh (z.B. [Dinges 1976]). Wesentlicher Bestandteil des stochastischen Denkens ist die Beziehung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zur

\* ) Dies ist eine überarbeitete und erweiterte Fassung der beim Österreichischen Mathematikertreffen in Leoben im September 1979 und beim Lehrerfortbildungstag an der Universität Wien im März 1979 gehaltenen Vorträge.

Realität, insbesondere die Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten und die Interpretation von Wahrscheinlichkeitsaussagen in der Wirklichkeit. Viele Begriffe, die im Rahmen mathematischer Modelle exakt definiert werden können, sind durch "vormathematischen" Gebrauch dem Lernenden vertraut. Beispiele dafür sind "Abstand", "Geschwindigkeit" oder "Kurve". Dem Wahrscheinlichkeitsbegriff hingegen begegnen viele Schüler zum ersten Mal, wenn er nach kurzer Motivation in ziemlicher Allgemeinheit definiert wird. Dies entspricht meines Erachtens einem Vorgehen, als würde man, ohne vorher jemals überhaupt von Geschwindigkeit geredet zu haben, die Momentangeschwindigkeit als den Anstieg der Zeit-Ort-Funktion definieren.

Wenn das mathematische Modell der Wahrscheinlichkeitsrechnung einmal konstruiert ist, wird darinnen gearbeitet. Die Schwierigkeiten mit dem Kalkül, insbesondere mit der Kombinatorik, überwiegen dann alles andere. Dadurch kommt in der Regel das Herstellen von Beziehungen zu außermathematischen Situationen zu kurz. (Durch das bloße Arbeiten im Modell kann übrigens auch dessen Stellenwert kaum bewußt gemacht werden).

Die Aufgabe, in praktischen Fällen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, kommt der beurteilenden Statistik zu. Sie entwickelt sozusagen die Meßvorschriften für die Wahrscheinlichkeit. Daß sie oft ein Stiefkind einer Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist, wirkt ebenfalls der Entwicklung eines adäquaten Wahrscheinlichkeitsbegriffes entgegen.

Welche anderen Möglichkeiten zur Kurgestaltung gibt es? Ausgehend von dieser Kritik möchte ich einige Vorschläge für die Gestaltung einer ersten Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung machen. Vor einer ausführlicheren Darstellung in den folgenden Kapiteln seien die Grundgedanken kurz skizziert.

Es ist möglich, den Wahrscheinlichkeitsbegriff im ersten Anlauf

nicht im Rahmen eines Modells, also nicht innermathematisch, zu definieren. Man kann Wahrscheinlichkeiten als Kennzahlen auffassen, die realen Ereignissen in verschiedenen Situationen zugeschrieben werden können und die eine bestimmte Bedeutung haben - etwa im Sinne eines Zusammenhanges mit relativen Häufigkeiten in langen Versuchsserien. Auf dieser Basis läßt sich ein Stück Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickeln, wobei zunächst auf Kombinatorik verzichtet wird. Mengenmodellierung und Axiomatisierung - ein Stück Wahrscheinlichkeitstheorie - können anschließend behandelt werden und dienen vor allem der weiteren Klärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes und weniger der Erschließung neuer Verfahren.

Eine Weiterentwicklung des Kalküls sollte dann so angelegt werden, daß in erster Linie die Grundlagen für einfachste Begriffe und Methoden der beurteilenden Statistik geschaffen werden. Eine zumindest exemplarische Behandlung dieser Begriffe und Methoden (etwa Tests oder Bereichsschätzung) sollte nämlich jedenfalls zu einer Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung gehören. Im Notfall würde ich eher auf Mengenmodell und Axiomatisierung verzichten.

Die von mir gemachten Vorschläge beziehen sich auf ein Minimalprogramm. Was in zusätzlichen Übungen oder in Leistungskursen mit guten Schülern gemacht wird, ist derzeit nicht das Hauptproblem der Mathematikdidaktik. Mancher wird daher einiges Wichtige vermissen. Trotzdem glaube ich, daß es noch Jahre dauern wird, bis die Inhalte, von denen ich reden werde, zum Standardlehrstoff des Gymnasiums gehören.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Beispiele und ein großer Teil der theoretischen Betrachtungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff dem Lehrwerk MATHEMATIK OBERSTUFE, Band 3, entnommen sind, an dem ich gemeinsam mit den Kollegen Bürger, Malle, Cejnek und Mühlgassner

derzeit arbeite. Besonders Herrn Bürger bin ich für viele wertvolle Anregungen und Vorschläge zu Dank verpflichtet.

1. Erste Entwicklung eines Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil. Man kann das Vergleichen von Erwartungen als ersten intuitiven Zugang zur Wahrscheinlichkeit benutzen.

Familien 1971 nach Zahl der Kinder (nach Bundesländer)

	Öster- reich	Burgen- land	Kärnten	Nieder- öster- reich	Ober- öster- reich	Salzburg	Steier- mark	Tirol	Vorarl- berg	Wien
Familien mit 0 Kindern	617.447	19.453	31.820	119.548	84.998	27.384	85.533	29.143	14.675	204.893
Familien mit 1 Kind	591.520	20.987	38.257	110.945	88.504	29.703	93.187	37.196	16.937	155.404
Familien mit 2 Kindern	397.035	18.056	30.013	78.945	67.392	22.380	66.714	29.427	14.573	69.535
Familien mit 3 Kindern	182.108	8.142	15.841	36.227	35.228	11.079	31.896	16.535	8.951	18.209
Familien mit 4 oder mehr Kindern	141.552	4.999	13.704	26.216	30.766	9.128	25.372	15.406	8.331	7.630
Kinder in Familien mit 4 oder mehr Kindern	583.777	23.569	67.003	125.679	149.164	44.072	122.721	76.208	40.080	35.261
Familien insgesamt	1.929.662	71.637	129.635	371.881	306.888	99.674	302.702	127.707	63.367	456.171
Kinder insgesamt	2.615.691	105.094	212.809	503.195	478.136	151.792	445.024	221.863	112.916	384.862

Aufgabe: Für eine Meinungsumfrage werden aus allen Familien eines Bundeslandes zufällig Familien ausgewählt. Beantworte anhand obiger Tabelle: (a) Erhält man in Salzburg eher eine Familie mit einem Kind oder eine Familie mit zwei Kindern? (b) Wo erhält man eine kinderlose Familie eher, in Kärnten oder im Burgenland?

Lösung: (a) Da es in Salzburg 29.703 Familien mit einem Kind und nur 22.380 Familien mit zwei Kindern gibt, ist zu erwarten, daß man eher eine Familie mit einem Kind erhält. (b) In Kärnten gibt es 31.830 kinderlose Familien; im Burgenland nur 19.453. Sind deswegen in Kärnten kinderlose Familien eher anzutreffen? In Kärnten gibt es ja überhaupt mehr Familien als im Burgenland.

Wir berechnen daher die relativen Anteile der Mengen der kinderlosen Familien in Kärnten und im Burgenland:

$$\text{Kärnten: } \frac{31\ 820}{129\ 635} \approx 0,245 = 24,5\%$$

$$\text{Burgenland: } \frac{19\ 453}{71\ 637} \approx 0,272 = 27,2\%$$

Demnach sind im Burgenland kinderlose Familien eher anzutreffen!

Bei sogenannter "zufälliger Auswahl", d.h. wenn kein Element bevorzugt bzw. benachteiligt wird, kann man also den relativen Anteil einer Teilmenge in einer Menge als Maß für die Erwartung nehmen, daß man ein Element der Teilmenge erhält. Wir nehmen das zunächst ohne weitere Begründung als intuitiv klar hin. Ein Maß für eine Erwartung nennen wir Wahrscheinlichkeit. Allgemein formuliert erhält man eine Regel für das Zuordnen von Wahrscheinlichkeiten zu realen Ereignissen.

Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil: Es sei  $G$  eine endliche Menge und  $A \subseteq G$ . Wird aus  $G$  ein Element zufällig ausgewählt, so nimmt man als Wahrscheinlichkeit dafür, daß das ausgewählte Element zu  $A$  gehört, den relativen Anteil von  $A$  in  $G$ . Wir schreiben kurz:

$$P(\text{Das ausgewählte Element gehört zu } A) = \frac{|A|}{|G|}.$$

An "zufälliger Auswahl" ist man z.B. bei Glücksspielen (Lotterien) oder bei Meinungsumfragen interessiert. Daß "zufällige Auswahl" vorliegt, wird oft angenommen, wenn man keinen Grund hat, etwas anderes anzunehmen, insbesondere, daß ein Element bevorzugt bzw. benachteiligt wird. Man nennt dies das Prinzip des unzureichenden Grundes.

Es liegt in der Natur dieser Auffassung von Wahrscheinlichkeit, daß man je nach Informationsstand verschiedene Ergebnisse erhalten kann, was etwa in der folgenden Aufgabe zum Ausdruck kommt:

Aufgabe: Für ein Quizspiel wurde aus der Menge aller österreichischen Familien zufällig eine Familie ausgewählt.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Familie aus Wien kommt?

(b) Wir haben erfahren, daß in der ausgewählten Familie mindestens vier Kinder leben. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, daß sie aus Wien kommt?

Zufallsmechanismen und Glücksspiele. Zur Durchführung "zufälliger Auswahl", wie man sie etwa bei Glücksspielen haben möchte, gibt es verschiedene Methoden. Besonders einfache sind: Ziehen aus einer Urne oder aus einem Kartenspiel usw. Aber auch: Münzwurf oder Würfeln. In den beiden letzten Fällen wird aus einer Menge mit zwei bzw. sechs Elementen zufällig ausgewählt. Beim Roulette wird eine aus siebenunddreißig Zahlen zufällig ausgewählt. In all diesen Fällen lassen sich Wahrscheinlichkeiten mit der Regel "Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil" berechnen.

Einige Bezeichnungen. Anhand des erarbeiteten Beispielmateriale lassen sich die Begriffe "Versuch", "Ereignis", sowie "sicheres Ereignis" und "unmögliches Ereignis" erklären. Dabei geschieht nichts anderes, als daß Bezeichnungen für gewisse reale Gegebenheiten eingeführt werden. Diese Begriffe können in diesem Stadium nicht in mathematischem Sinn definiert werden. Es liegt ja kein mathematisches Modell vor, wie etwa das Mengenmodell, innerhalb dessen dies geschehen könnte.

Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit. Daß man Erwartungen mittels relativer Anteile mißt, beruht vielleicht auf der intuitiven Vorstellung: Je höher der relative Anteil (der Teilmenge) ist, desto eher tritt das Ereignis ein. Daß beim Würfeln alle Augenzahlen die Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{6}$  haben, bedeutet vorderhand nicht mehr, als daß für alle Augenzahlen die gleiche Erwartung besteht. Welche quantitative Prognose kann aber man aus der Aussage  $P(\text{Es kommt "6"}) = \frac{1}{6}$  ableiten? - Für einen Einzelversuch keine. Wohl aber für eine Versuchsfolge. Das sollte vom Schüler erfahren werden, daher die folgende Aufgabe.

Aufgabe: Jeder Schüler soll 30mal würfeln und notieren, wie oft dabei eine Sechs kommt. Anschließend sind die Ergebnisse aller Schüler zusammenzufassen. In welchem Bruchteil aller Würfe ist eine Sechs gekommen?

Man erkennt: Die relative Häufigkeit in der Versuchsfolge ist bei großer Anzahl der Versuche ungefähr gleich dem relativen Anteil in der Grundmenge und damit gleich der angenommenen Wahrscheinlichkeit. Dies ist eine Erfahrungstatsache, die an verschiedenen Beispielen überprüft werden kann, bei denen zufällige Auswahl angenommen wird. Die folgende Aufgabe leitet einen neuen Gedanken ein.

Aufgabe: Wirft man einen Reißnagel, so kann er so  $\perp$  oder so  $\lambda$  zu liegen kommen. Es sei E das Ereignis, das durch die erste Lage bestimmt ist. Wie groß ist  $P(E)$ ? Führe eine Versuchsserie durch!

Zur Lösung dieser Aufgabe beginnt man mit der naiven Annahme:  $P(E) = \frac{1}{2}$ . Eine Versuchsserie mit einem bestimmten Reißnagel ergibt aber (etwa)  $h_{300}(E) = 0,74$ . Offenbar weicht diese relative Häufigkeit von der angenommenen Wahrscheinlichkeit doch deutlich ab. Will man die Aussage, daß bei zufälliger Auswahl die relative Häufigkeit in einer langen Versuchsserie ungefähr gleich dem relativen Anteil in der Grundmenge ist, aufrecht erhalten, so muß man annehmen, daß hier eben nicht zufällige Auswahl vorliegt. Wie kommt man dann aber zu einer Wahrscheinlichkeit für E? Offenbar wäre es vernünftig  $P(E) \approx 0,74$  anzunehmen.

Dazu formulieren wir folgende Regel:

Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit: Ein Versuch mit einem Ereignis E werde n-mal unter den gleichen Bedingungen durchgeführt. Es sei n groß und  $h_n(E)$  die relative Häufigkeit von E. Für eine Zahl  $P(E)$ , die als Wahrscheinlichkeit für E angenommen wird, soll dann gelten:  $h_n(E) \approx P(E)$ .

Diese Regel dient zur Überprüfung und zur Gewinnung von Annahmen über Wahrscheinlichkeiten. Beides ist in dem Reißnagel-Beispiel geschehen. Weiter lassen sich Aufgaben der folgenden Art behandeln:

Aufgabe: Indem man 50mal blind mit einem Bleistift auf eine Zeitung tippt, schätze man, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig aus dem vorliegenden Text ausgewählter Buchstabe ein Vokal ist.

Verschiedene Versuchsserien können zu verschiedenen relativen Häufigkeiten und damit zu verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für ein Ereignis führen. Es ist aber eine Erfahrungstatsache, daß bei großem  $n$  die relativen Häufigkeiten  $h_n(E)$  in verschiedenen Versuchsserien nicht sehr voneinander abweichen (Empirisches Gesetz der großen Zahlen).

Bedingte Wahrscheinlichkeiten. Wir wissen bereits, daß Wahrscheinlichkeiten vom Informationsstand abhängen können. Dies kommt auch in folgender Aufgabe zum Ausdruck.

Aufgabe: Die 628 Beschäftigten einer Firma verteilen sich gemäß nebenstehender Tabelle auf die Gruppen Frauen-Männer bzw. Raucher-Nichtraucher. Eine Person  $X$  wird zufällig ausgewählt. Berechne:

- (a)  $P(X \text{ ist Raucher})$   
(b)  $P(X \text{ ist Raucher})$ , wenn man bereits weiß, daß  $X$  eine Frau ist.

	Frauen	Männer
Raucher	201	189
Nicht-raucher	98	140

Lösung: (a)  $P(X \text{ ist Raucher}) = \frac{390}{628} \approx 0,62$

(b)  $P(X \text{ ist Raucher}) = \frac{201}{299} \approx 0,67$

Bei (b) wird die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses  $E_1$  unter der Voraussetzung berechnet, daß ein Ereignis  $E_2$  eintritt (bzw. eingetreten ist). Man führt dafür ein Symbol ein,  $P(E_1 | E_2)$ , und nennt dies bedingte Wahrscheinlichkeit von  $E_1$  unter der Voraussetzung  $E_2$ . Bedingte Wahrscheinlichkeiten stellen in diesem Zusammenhang keine



neue Art von Wahrscheinlichkeit dar. Voraussetzungen bzw. Annahmen liegen ja jeder Wahrscheinlichkeitsbestimmung zugrunde. (Bisher meist "zufällige Auswahl"). Das Besondere an den bedingten Wahrscheinlichkeiten ist, daß eine Voraussetzung darin besteht, daß ein bestimmtes Ereignis eintritt und daß diese Voraussetzung in der Symbolik ausgedrückt wird. Man sagt,  $E_2$  begünstigt  $E_1$ , falls  $P(E_1|E_2) > P(E_1)$  ist, und  $E_2$  benachteiligt  $E_1$ , falls  $P(E_1|E_2) < P(E_1)$  ist, und schließlich sagt man, daß  $E_1$  unabhängig von  $E_2$  ist, falls  $P(E_1|E_2) = P(E_1)$  ist.

Damit lassen sich verschiedene Aufgaben behandeln. So kann man etwa anhand einer Tabelle über Bücherkauf-Gewohnheiten der Österreicher untersuchen, ob das Ereignis, Hauptschulbildung zu haben, das Ereignis, keine Bücher zu kaufen, begünstigt. Ein anderes Beispiel ist die folgende Aufgabe.

Aufgabe: Einem Lehrer wird vorgeworfen, er benote Schülerinnen milder als Schüler. Zu seiner Rechtfertigung legt er die nebenstehende Tabelle vor, die eine Zusammenfassung der von ihm im letzten Jahr

Note	Mädchen	Knaben
1	15	10
2	37	25
3	43	21
4	35	26
5	20	11
	150	103

gegebenen Schularbeitsnoten enthält. Besteht der Vorwurf zurecht? (Untersuche etwa: Begünstigt das Ereignis, eine Schülerin zu sein, das Ereignis, eine Note besser als 3 zu erhalten?)

Oft wird die bedingte Wahrscheinlichkeit reduktionistisch (unter Zurückführung auf "gewöhnliche" Wahrscheinlichkeit) durch die Gleichung  $P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_2)}$  definiert. Bei den angegebenen Beispielen stellt sich aber ein direkter Zugang, bei dem dann bedingte Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile berechnet werden, als natürlicher heraus. Würde man etwa in der oben angeführten Aufgabe über Raucher und Nichtraucher verschiedenen Geschlechts in einem

Betrieb die Wahrscheinlichkeit  $P(X \text{ ist Raucher} | X \text{ ist eine Frau})$  nach der Formel  $P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_2)}$  berechnen, so wäre dies doch gekünstelt - allenfalls könnte eine solche Berechnung zur Rechtfertigung der Formel dienen.

Was ist Wahrscheinlichkeit? Es ist klar, daß das, was bisher über Wahrscheinlichkeit gesagt wurde, keine exakte (inner-)mathematische Definition ist. Schon gar nicht eine, die den jeweiligen Wert zahlenmäßig eindeutig bestimmt, wie das etwa bei der Definition des Wurzelbegriffes oder des Integralbegriffes der Fall ist. Worum handelt es sich sonst?

Wahrscheinlichkeit wird wie eine physikalische Größe gehandhabt, etwa wie "Länge" oder "Gewicht" (Wahrscheinlichkeit ist natürlich auch eine physikalische Größe, der Anwendungsbereich geht aber über die Physik hinaus). Es wurden einige Regeln angegeben, die folgende Funktionen haben:

- Sie dienen der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten, entweder auf Grund von Annahmen und theoretischen Überlegungen oder auf Grund von Versuchen. (Das gibt es auch bei den genannten physikalischen Größen: Z.B. Längen können mittels theoretischer (geometrischer) Überlegungen ermittelt oder auch gemessen werden).
- Sie drücken den Sinn des Wahrscheinlichkeitsbegriffs aus, insbesondere für Prognosen.

Wahrscheinlichkeitswerte sind in der Regel unsicher. Man kann für dasselbe Ereignis verschiedene Wahrscheinlichkeitswerte erhalten, z.B. wenn verschiedene Versuchsserien vorliegen oder wenn auf Grund verschiedener Informationen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden.

- Das ist bei den meisten physikalischen Größen nicht prinzipiell anders! Auch für die Länge eines Stabes, die Temperatur eines Gases usw. erhält man bei genauer Messung verschiedene Meßergebnisse, die

dann gemittelt werden. Auch die Vorinformation des Beobachters kann einen Einfluß auf das Meßergebnis haben: er entscheidet ja, welches Meßinstrument er verwendet. Ein Thermometer, dessen Temperatur sich sehr von der zu messenden Temperatur etwa des umgebenden Gases unterscheidet, wird dessen Temperatur verändern und im Endeffekt eine andere Temperatur anzeigen als ein Thermometer, dessen Temperatur mit jener des umgebenden Gases nahezu übereinstimmt. - Wenn auch in dieser Hinsicht kein prinzipieller Unterschied zwischen vielen physikalischen Größen und der Wahrscheinlichkeit besteht, muß man doch beachten, daß die Unterschiede zwischen Wahrscheinlichkeitswerten oft viel größer sein können als die Unterschiede zwischen verschiedenen Meßergebnissen.

In diesem Zusammenhang stellt sich auch die Frage: Gibt es den "wahren, objektiven Wert" einer Wahrscheinlichkeit? Oder sind Wahrscheinlichkeitswerte nur subjektiv zugeordnet?

In der Physik spricht man, wenn man verschiedene Meßergebnisse für eine Größe erhält, oft von Meßfehlern. D.h., man geht davon aus, daß es einen "wahren Wert" für die zu messende Größe gibt, daß man diesen aber bei Messungen nicht genau erhält. Eine ähnliche Auffassung gibt es auch bezüglich Wahrscheinlichkeiten: Man kann etwa beim Reißnagelwerfen annehmen, daß es eine bestimmte reelle Zahl gibt, die gleich der Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Lage ist. Diese Zahl hängt von der physikalischen Beschaffenheit des Reißnagels, der Luft und der Art des Werfens und vielleicht noch von anderen Umständen ab. Da man diese Zahl allerdings nie genau und sicher bestimmen kann - übrigens auch beim Münzwurf, Würfeln, Roulette nicht, da kein Gerät ganz symmetrisch ist - lehnen es manche Wahrscheinlichkeitstheoretiker ab, Wahrscheinlichkeit als eine "objektiv existierende" Größe anzusehen.

Damit ist kein prinzipieller Unterschied zu physikalischen Größen wie "Länge", "Temperatur" usw. gegeben. In der heutigen Physik weiß man, daß viele Größen grundsätzlich nicht genau bestimmbar sind, da sie sich ständig und insbesondere durch den Meßvorgang verändern - z.B. die Temperatur eines Gases. In diesem Sinn gibt es auch diese physikalischen Größen nicht - zumindest nicht als eindeutig bestimmbare zugeordnete reelle Zahlen.

Genaue Werte erhält man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wie in der Physik immer nur dann, wenn man theoretische Annahmen trifft, z.B. "zufällige Auswahl" oder, daß ein bestimmtes reales Dreieck wirklich rechtwinkelig ist (damit zur Längenberechnung der pythagoräische Lehrsatz angewendet werden kann).

Obwohl man von vielen physikalischen Größen weiß, daß sie als genaue Werte in der Realität nicht existieren, ist es doch bequem, davon zu sprechen, z.B. von der Temperatur eines Gases. Es ist also einfacher, so zu tun, als gäbe es einen genauen Wert. Ähnlich ist es in manchen Situationen bei der Wahrscheinlichkeit: Bei Münzwurf, Reißnagelwurf etc. ist es unter Umständen zweckmäßig, die Existenz eines "wahren Wertes" der Wahrscheinlichkeit anzunehmen. In all diesen Fällen ist die Annahme eines genauen Wertes zumindest eine nützliche Fiktion, die theoretische Begriffsbildungen erleichtert.

Für Anwendungen ist es belanglos, ob man die Existenz von Wahrscheinlichkeiten annimmt oder nicht. Es kommt eher darauf an, welche praktische Bedeutung Wahrscheinlichkeitsaussagen haben. D.h., wie man zu ihnen kommt und welche Konsequenzen man daraus ziehen kann. Wir haben dazu die Regel "Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit" formuliert. Sie gibt einerseits an, wie man zu Wahrscheinlichkeitsaussagen kommen kann, und andererseits sagt sie, was eine Wahrscheinlichkeitsaussage (als Prognose) bedeutet. "Wahrscheinlich-

keit als relative Häufigkeit" ist die letzte Instanz, wenn es um Entscheidungen in Bezug auf Wahrscheinlichkeitsaussagen geht. Daß die unpräzise Formulierungen enthält, ist unumgänglich: Beziehungen zwischen Mathematik und Realität können nie mit innermathematischer Genauigkeit hergestellt werden.

Bezüglich der beiden Regeln "Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil" und "Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit" werden keine expliziten Konsistenzüberlegungen durchgeführt. Es handelt sich - wissenschaftstheoretisch gesehen - um "partielle Deutungen" des Wahrscheinlichkeitsbegriffs (vgl. [Stegmüller 1973]). Es wird "lokal" gearbeitet. Dabei erscheint "Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil" als der einfachere, primäre Begriff. Er ist schon Volksschulkindern zugänglich (vgl. [Fischbein 1975]).

Derartige Reflexionen über den Wahrscheinlichkeitsbegriff sollten, entsprechend formuliert und durch Beispiele illustriert, auch Schülern zugänglich gemacht werden.

## 2. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Grundlegend für das Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten sind Additions- und Multiplikationsregel. Diese haben für den der Mathematik (noch) nicht vollständig einverleibten Wahrscheinlichkeiten, von in bestimmter Weise verbundenen realen Ereignissen zusammenhängen, bzw. als Postulat, zusammenhängen sollen. Sie sind nicht mathematisch beweisbar. Um bei Analogie zu Länge oder Gewicht zu bleiben: Fügt man zwei Stäbe aneinander, so addieren sich die Längen. Fügt man zwei Körper zusammen, so addieren sich ihre Gewichte. Auch diese Sätze sind nicht mathematisch beweisbar, sondern nur empirisch überprüfbar oder durch Gedankenexperimente erklärbar.

Additionsregel. Die Additionsregel braucht im Zusammenhang mit der Oder-Verknüpfung von Ereignissen nur bewußt gemacht zu werden.

Additionsregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Sind  $E_1$  und  $E_2$  einander ausschließende Ereignisse desselben Versuches, so gilt

$$\underline{P(E_1 \vee E_2) = P(E_1) + P(E_2)}.$$

Eine Begründung erfolgt anhand der Additivität des relativen Anteils und der relativen Häufigkeit.

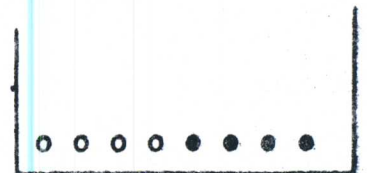
Es geht zunächst nicht darum, mit dieser Regel neue Aufgaben lösen zu können. Sie wird als etwas bei Wahrscheinlichkeitsaussagen zu Beachtendes hingestellt. Dieser Charakter wird in folgender Aufgabe deutlich:

Aufgabe: Bei einem Rennen starten 5 Pferde. Herr Adam sieht die Gewinnchancen wie folgt: Pferd A gewinnt mit 60%-iger Wahrscheinlichkeit, Pferd B mit 30%-iger Wahrscheinlichkeit, die Pferde C, D, E mit je 10%-iger Wahrscheinlichkeit.

Beachtet Herr Adam die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung?

Verknüpfung von Versuchen; die Multiplikationsregel. Anders als die Additionsregel erschließt die Multiplikationsregel doch neue Möglichkeiten bei Versuchen, die durch "Verknüpfung" (z.B. Hintereinanderausführung) von einfacheren Versuchen entstehen.

Aufgabe: Aus der nebenstehenden Urne werden nacheinander zwei Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die erste Kugel schwarz und die zweite weiß ist?



Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, als erste eine schwarze Kugel zu ziehen, ist offenbar  $\frac{3}{8}$ . Wir schreiben:  $P(S_1) = \frac{3}{8}$ . Die Wahrscheinlichkeit, dann eine weiße Kugel zu ziehen - wenn zuerst eine schwarze gezogen wurde - ist  $\frac{4}{7}$ , also:  $P(W_2 | S_1) = \frac{4}{7}$ .

Wie kommen wir nun zu  $P(S_1 \wedge W_2)$ ?

Wir müssen uns auf eine bestimmte Vorstellung von Wahrscheinlichkeit berufen und argumentieren etwa in folgendem Gedankenexperiment:

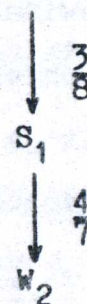
Bei einer längeren Versuchsserie wird in  $\frac{3}{8}$  aller Fälle die erste Kugel schwarz sein. In  $\frac{4}{7}$  aller dieser Fälle wird die zweite Kugel weiß sein. Daher wird in  $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7}$  aller Fälle die erste Kugel schwarz und die zweite weiß sein. Somit gilt:

$$P(S_1 \wedge W_2) = P(S_1) \cdot P(W_2|S_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{3}{14}$$

In Verallgemeinerung dieser Überlegungen erhält man:

Multiplikationsregel der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Sind  $E_1, E_2$  Ereignisse eines Versuches, so gilt  $P(E_1 \wedge E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$ . Zur Veranschaulichung der Anwendung der Multiplikationsregel, insbesondere bei zwei- und mehrstufigen Versuchen, sind Wegdiagramme nützlich, wie das nebenstehende Wegdiagramm für die obige Aufgabe.

Nun können Aufgaben über "zweistufige" Versuche behandelt werden oder auch Aufgaben folgender Art, bei denen eine "Stufenabfolge" erst hineingelegt werden muß.



Aufgabe: Eine Diebstahlsicherung funktioniert mit der Wahrscheinlichkeit 0,9, eine zweite mit der Wahrscheinlichkeit 0,95. "Funktionieren" bedeutet dabei, daß im Einbruchfall Alarm ausgelöst wird. Ein Hausherr läßt beide Anlagen so einbauen, daß sie unabhängig voneinander sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird im Einbruchfall Alarm ausgelöst?

Besonders einleuchtend erscheint die Multiplikationsregel, wenn man sie für Wahrscheinlichkeiten, die relative Anteile sind, anwendet, wie in folgender Aufgabe.

Aufgabe: In einem Staat sind 25% der Bevölkerung von weißer Hautfarbe. Von diesen haben 30% höhere Bildung. (a) Wie groß ist der relative Anteil der Weißen mit höherer Bildung an der Gesamtbevöl-

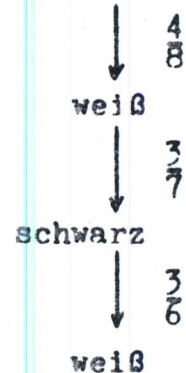
kerung? (b) Wie kann man (a) mit Hilfe der Multiplikationsregel lösen? (Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewählter Staatsbürger ein Weißer mit höherer Bildung ist?)

Mehrstufige Versuche. Mittels mehrfacher Anwendung des Multiplikationssatzes kann man bei mehrstufigen Versuchen Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse berechnen, die Folgen von Ereignissen der Einzelversuche sind. Modellbeispiel ist mehrfaches Ziehen aus einer Urne (mit oder ohne Zurücklegen).

Z.B. gilt für die oben dargestellte Urne bei Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(\text{weiß, schwarz, weiß}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{28}.$$

Zur Veranschaulichung dient wieder ein Wegdiagramm.



Es ist erstaunlich, welche Aufgaben mit der Multiplikationsregel gelöst werden können, ohne Verwendung kombinatorischer Formeln. Die folgenden Aufgaben sind Beispiele dafür.

Aufgabe: In einem Raum sind 5 Personen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei (a) am gleichen Wochentag, (b) im gleichen Monat, (c) am gleichen Jahrestag geboren wurden?

Lösung zu (a): Wir betrachten das Gegenereignis  $\neg E$ , daß alle an verschiedenen Wochentagen geboren wurden, und fragen eine Person nach der anderen nach ihren Geburtstag. Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_5$  die Antworten, die wir bekommen. Wir betrachten die Ereignisse:

$$E_2: x_2 \neq (x_1), \quad E_3: x_3 \neq (x_1, x_2).$$

$$E_4: x_4 \neq (x_1, x_2, x_3), \quad E_5: x_5 \neq (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$\text{Dann gilt: } \neg E = E_2 \wedge E_3 \wedge E_4 \wedge E_5.$$

Aus dem nebenstehenden Wegdiagramm lesen wir ab:





Aufgabe: Beim deutschen Zahlenlotto werden 6 verschiedene Nummern aus 49 gezogen. Dabei kommt es auf die Reihenfolge nicht an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Ausfall (und damit für einen richtigen Typ)?

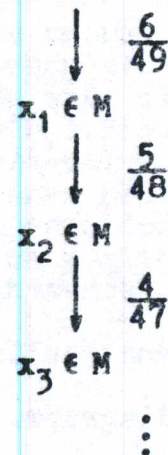
Lösung: Es sei  $M$  eine 6-elementige Teilmenge aus den 49 Nummern. Wir ziehen eine Nummer nach der anderen, die Ergebnisse seien

$$x_1, x_2, \dots, x_6.$$

Aus dem nebenstehenden Wegdiagramm lesen wir ab, daß die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44}$$

beträgt.



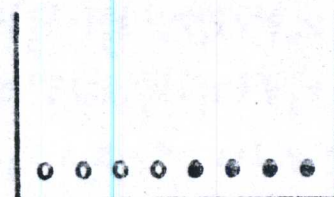
Ein erstes Gefühl für Wahrscheinlichkeiten bei längeren Versuchsserien vermitteln "Umkehraufgaben" der folgenden Art:

Aufgabe: Wie oft muß gewürfelt werden, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine 6 größer als 99% ist?

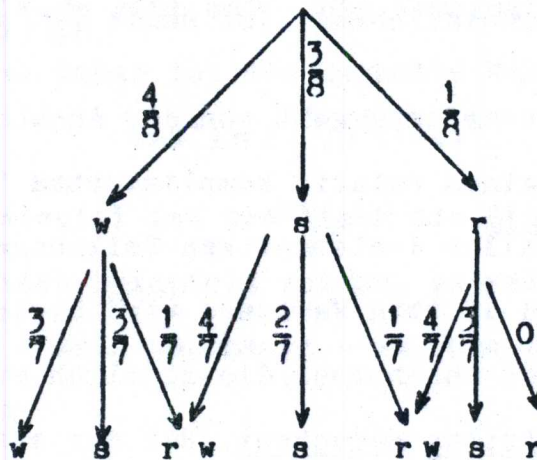
Baumdiagramme. Manche Ereignisse können nicht durch einen "Weg" dargestellt werden, sondern erfordern ein "verzweigtes Wegdiagramm", ein sogenanntes Baumdiagramm zum Beispiel in der folgenden Aufgabe.

Aufgabe: Aus der nebenstehenden gezeichneten Urne werden zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- (a) Beide Kugeln haben dieselbe Farbe.
- (b) Eine Kugel ist rot, eine weiß.
- (c) Die zweite Kugel ist schwarz.
- (d) Keine der Kugeln ist weiß.



Lösung: Wir stellen den ganzen Versuch in einem Baumdiagramm dar. Jeder Ausfall entspricht einem "Weg".



(a) Beide Kugeln haben dieselbe Farbe. Dieses Ereignis setzt sich aus drei Ereignissen zusammen: (w,w), (s,s), (r,r). Diesen Ereignissen entsprechen Wege im Baumdiagramm. Die zu verschiedenen Wegen gehörenden Ereignisse sind unverwinnbar, daher können wir den Additionssatz anwenden und erhalten für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{1}{8} \cdot 0 = \frac{9}{28} \approx 0,32$$

(b),(c),(d) gehen analog. Bei (d) kann man aber auch so schließen:  
 $P = P(1. \text{ Kugel nicht weiß}) \cdot P(2. \text{ Kugel nicht weiß} | 1. \text{ Kugel nicht weiß}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$ .

Aus der Lösung zum Teil (d) der Aufgabe sieht man, daß sich doch manche Ereignisse mit einem Weg beschreiben lassen, wenn man es auch aus der Aufgabe auf den ersten Blick nicht unbedingt erkennt.

Mit Hilfe von Baumdiagrammen lassen sich eine Reihe von Aufgaben behandeln. Die Grenzen der Methode sind dann erreicht, wenn die Baumdiagramme unübersichtlich werden, was sich wohl in einigen Fällen durch geschickte Wahl der Ereignisse auf den einzelnen "Stufen" vermeiden läßt. läßt es sich aber nicht vermeiden, so benötigt man kombinatorische Formeln.

$$\xrightarrow{\frac{4}{10}} x_1 \in M \xrightarrow{\frac{3}{9}} x_2 \in M \xrightarrow{\frac{2}{8}} x_3 \in M \xrightarrow{\frac{1}{7}} x_4 \in M$$

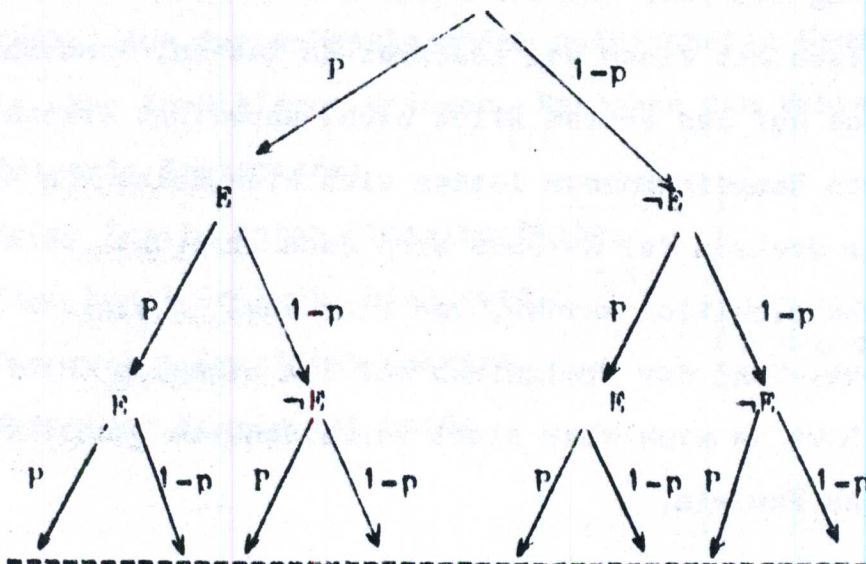
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit  $\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}$ .

Die erste Lösungsvariante geht von der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit in einem relativ komplizierten "Grundraum" aus, nämlich in der Menge aller 4-elementigen Teilmengen von  $\{1, 2, \dots, 10\}$ . Bei der zweiten und dritten Variante wird Gleichheit für bedingte Wahrscheinlichkeiten angenommen, die ziemlich evident ist, und dann mit Wahrscheinlichkeiten gerechnet. Bei der ersten Variante wird eigentlich (nur) Kombinatorik betrieben.

Nicht immer läßt sich - wie im obigen Beispiel - Kombinatorik ganz umgehen, wie folgendes Beispiel zeigt, das für eine wichtige Klasse von Aufgaben grundlegend ist.

Beispiel: Ein Versuch, bei dem ein Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit p eintritt, werde 10-mal unter gleichen Bedingungen durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $E^4$ , daß dabei E genau 4-mal eintritt?

Lösung: Ein vollständiges Baumdiagramm zu diesem Versuch wäre ziemlich unübersichtlich.



Man erkennt jedoch: Jeder Weg, der zum interessierenden Ereignis  $E^4$  führt, hat die Wahrscheinlichkeit  $p^4(1-p)^6$ . Die Frage ist nur: Wie viele solche Wege gibt es? - Die Kombinatorik gibt die Antwort: Es sind  $\binom{10}{4}$  Wege. Daher ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$P(E^4) = \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6.$$

Mit dem obigen Beispiel ist praktisch die Binomialverteilung hergeleitet. Die beiden Beispiele zeigen, zu welchem Zweck kombinatorische Formeln - wenn überhaupt - im vorgeschlagenen Kursaufbau eingesetzt werden:

Kombinatorische Formeln dienen zur Berechnung von Anzahlen von Wegen bei unübersichtlichen Baumdiagrammen.

Welche Rolle spielen die Aufgaben im bisher skizzierten Kurs?

Bei vielen schwierigen Aufgaben in manchen Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat man den Eindruck, sie werden lediglich gestellt, damit eben schwierige Aufgaben vorkommen. Ich meine damit vor allem jene Aufgaben, bei denen komplizierte kombinatorische Berechnungen anzustellen sind. Dazu ein Beispiel: "Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei 5-maligem Würfeln mindesten zwei Sechsen, genau eine Eins und keine Drei kommen?" - Da man Ereignisse und insbesondere endliche Mengen auf sehr verschiedene Arten beschreiben kann, sind der Phantasie fast keine Grenzen gesetzt und man kann Aufgaben stellen, die nur schwer mit dem Werkzeug einiger kombinatorischer Anzahlformeln bearbeitet werden können. Doch wozu diese Aufgaben? Vielleicht um die Unschärfen des Begriffes zu verdecken?

Im vorgeschlagenen Kurs sind zu Beginn (vor Behandlung der Multiplikationsregel) lediglich solche Aufgaben vorgesehen, deren mathematische Behandlung äußerst einfach ist, meist nur einen Rechenschritt

erfordert - vergleichbar etwa mit "Schlußrechnungen". Ich glaube auch, daß diese Aufgaben ohne weiters 12-jährigen Schülern gestellt werden könnten. Andererseits glaube ich aber auch nicht, daß sie für 17-jährige, die noch nichts über Wahrscheinlichkeit gelernt haben, zu einfach sind, und noch weniger glaube ich, daß sie übersprungen werden sollten. Die Schwierigkeit liegt nämlich in der Vielfalt der Anwendungskontexte, die aber insgesamt erst ein adäquates Verständnis von Wahrscheinlichkeit ermöglicht. Mit Hilfe der Additions- und Multiplikationsregel sowie Weg- und Baumdiagrammen werden dann Wahrscheinlichkeiten aus Wahrscheinlichkeiten berechnet. Die dabei gestellten Aufgaben haben vor allem die Funktion, diese Regeln einzuüben.

Wir fassen zusammen: Die Aufgaben im bisher skizzierten Teil des vorgeschlagenen Kurses haben vor allem die Funktion, grundlegende Begriffe und Regeln zu vertiefen. Daneben sollen sie natürlich motivierend wirken. - Aufgaben, die stochastische Verfahren einüben sollen, die in der Praxis verwendet werden, sind noch kaum vorgekommen.

In welche Richtung soll der Wahrscheinlichkeitskalkül weiterentwickelt werden? Ich meine, daß kompliziertere Aufgaben, insbesondere jene, bei denen Kombinatorik benötigt wird, auf ein bestimmtes Ziel abgestellt sein sollen. Als ein solches Ziel sehe ich einfache Methoden der beurteilenden Statistik, also Test- und Schätzmethoden an. Sie verfeinern und präzisieren den Zusammenhang zwischen der mathematischen Wahrscheinlichkeit (einer Zahl) und der Wirklichkeit, den wir vorläufig in der Regel "Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit" hergestellt haben. Allen diesen Verfahren ist gemeinsam, daß aus gewissen Annahmen über Wahrscheinlichkeiten (bzw. über damit zusammenhängende "Parameter"), die Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Ereignisse, deren Eintreten bzw. Nichteintreten real beobachtet werden

kann, berechnet werden. Aus dem Ergebnis der Beobachtung schließt man dann zurück auf die Ausgangsannahmen. Was braucht man dafür vom Wahrscheinlichkeitskalkül? Dies hängt davon ab, welche Art von Experimenten zur Überprüfung von Wahrscheinlichkeitshypothesen durchgeführt werden. Wir wollen uns auf zwei typische Experimente beschränken:

- Durchführen von Versuchsfolgen,
- Ziehen von Stichproben (z.B. in der Qualitätskontrolle oder bei Meinungsumfragen).

Beide Experimente kann man als mehrstufige Versuche auffassen, zu deren Behandlung wir mit Multiplikationsregel, Weg- und Baumdiagrammen schon einen Grundstein gelegt haben. Es stellt sich die Frage: Welche Wahrscheinlichkeiten sind bei diesen Experimenten von Interesse?

Im ersten Fall ist man meistens an der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein bestimmtes Ereignis  $k$ -mal ( $k \in \mathbb{N}$ ) eintritt, interessiert, was auf die Binomialverteilung bzw. deren Grenzfälle Normal- und Poissonverteilung hinausläuft. Im zweiten Fall ist es die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Stichprobe genau  $k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) Elemente einer bestimmten Teilmenge der Grundgesamtheit enthalten sind. Dafür ist die hypergeometrische Verteilung zuständig. Bei weiterer Stoffreduktion im Sinne eines Minimalprogramms kann man sich zur bloßen Erläuterung der Grundgedanken auf Versuchsfolgen beschränken, zumal bei großem Umfang der Grundgesamtheit im Vergleich zum Stichprobenumfang das Ziehen einer Stichprobe sich wie eine unabhängige Versuchsfolge verhält.

Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten. Mit Hilfe der Multiplikationsregel kann man auch bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen:

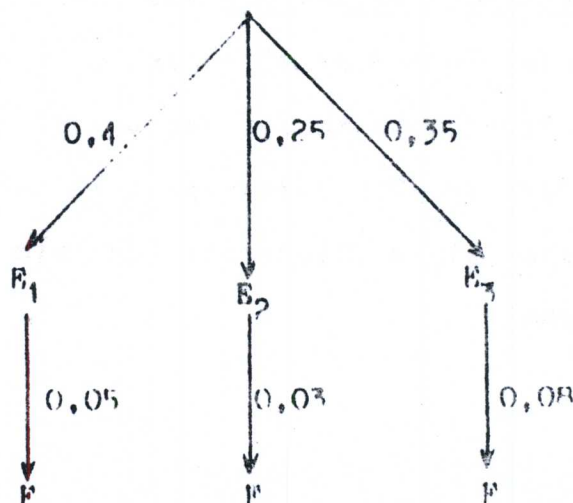
$P(E_2 | E_1) = \frac{P(E_1 \wedge E_2)}{P(E_1)}$  (Dies ist hier nicht die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit!). Dies wird etwa bei folgender Aufgabe verwendet:

Aufgabe: Drei Maschinen I, II und III produzieren Transistoren, und zwar die Maschine I 40%, die Maschine II 25% und die Maschine III 35% der Gesamtproduktion. Der relative Anteil an fehlerhaften Transistoren ist bei I 5%, bei II 3% und bei III 8%.

Maschine	I	II	III
rel. Anteil an Gesamtproduktion in %	40	25	35
Fehleranteil in %	5	3	8

- (a) Wie groß ist der relative Anteil an fehlerhaften Transistoren in der Gesamtproduktion?
- (b) Formuliere und löse (a) wahrscheinlichkeitstheoretisch!
- (c) Zufällig erhalte ich einen fehlerhaften Transistor. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt er von Maschine I?

Lösung: (b) Ein Transistor wird aus der Gesamtproduktion zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er fehlerhaft? Mit Hilfe der Ereignisse  $E_i$ : Der Transistor stammt von der  $i$ -ten Maschine ( $1 \leq i \leq 3$ );  $F$ : Der Transistor ist fehlerhaft, und dem verkürzten Baumdiagramm



erhält man:  $P(F) = 0,04 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot 0,03 + 0,35 \cdot 0,08 = 0,0555$

(c) Gesucht ist  $P(E_1|F)$ .

$$\text{Es ist } P(E_1|F) = \frac{P(E_1 \wedge F)}{P(F)} = \frac{0,4 \cdot 0,05}{0,0555} \approx 0,36$$

Man beachte, daß sich der "Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit" bzw. die "BAYESche Regel", die oft zur Lösung derartiger Aufgaben herangezogen werden, zwanglos aus der Verwendung von Baumdiagrammen ergeben. Man braucht sie gar nicht eigens zu formulieren.

Es sei auch darauf hingewiesen, daß sich die obige Aufgabe (auch die Frage (c)) ohne Wahrscheinlichkeit formulieren und lösen läßt!

### 3. Mengenmodell, Axiomatisierung und ihre didaktische Bedeutung

Was geschieht bei der Bildung des Mengenmodells und bei der Axiomatisierung? Im bisherigen Sinn entspricht Wahrscheinlichkeit einer physikalischen Größe. Wahrscheinlichkeiten sind Maßzahlen, die realen Gegebenheiten nach gewissen Regeln zugeordnet werden. Additions- und Multiplikationsregel stellen Zusammenhänge zwischen Wahrscheinlichkeiten her, wenn die entsprechenden (realen) Ereignisse in bestimmter Weise zusammenhängen. Das mathematische Modell ist in diesem Fall die Struktur (der angeordnete Körper) der reellen Zahlen. Durch die Einführung von Bezeichnungen wie "Versuch" oder "Ereignis", durch das Verknüpfen von Ereignissen, durch Baumdiagramme usw. werden die Realsituationen strukturiert, es werden aber noch nicht die damit gemeinten Teile der Realsituation von der Wirklichkeit getrennt und als eigenes mathematisches Modell errichtet.

Durch Bildung von Ereignisraum (auch: Stichprobenraum) und/oder Ereignisalgebra (axiomatisch oder mittels Repräsentanten) als selbständige mathematische Objekte wird der Modellbildungsprozeß weitergetrieben. Ein weiteres Stück der Struktur der Wirklichkeit wird von der Wirklichkeit getrennt.



Die axiomatische Wahrscheinlichkeitsdefinition trennt ebenfalls, und zwar das allgemein-formale, mathematische von dem, was nur der jeweiligen speziellen Situation anhaftet.

Ein weiterer Aspekt, der sowohl der Mengenmodellierung als auch der axiomatischen Wahrscheinlichkeitsdefinition anhaftet, ist folgender: Während der erste Wahrscheinlichkeitsbegriff nur lokal modelliert, d.h. nur in Bezug auf ein einzelnes Ereignis (oder einige Ereignisse, die irgendwie zusammenhängen), erfolgt durch Mengenmodell und axiomatische Definition eine globale Modellierung. Es wird ja die Ereignisalgebra gebildet und Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion, die jedem Ereignis eine Zahl zuordnet. Besonders wirkt sich dieser Unterschied bei mehrstufigen Versuchen aus: Rechnet man zunächst "lokal" mit bedingten Wahrscheinlichkeiten (etwa längs eines Pfades), so ist dann der volle Ereignisraum (etwa ein cartesisches Produkt) stets mitzubetrachten. \*)

Warum überhaupt Mengenmodell und axiomatische Wahrscheinlichkeitsdefinition im Unterricht? Wie jede Mathematisierung trägt auch die weitere "Mathematisierung" des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu dessen Klärung bei. Zunächst wirken schon die präzisen Begriffe der Mathematik, insbesondere der Mengenlehre (Teilmengen, Mengenoperationen, Funktion,...), in diese Richtung. Weiters wird es durch die Trennung von Realsituation und mathematischem Modell erst möglich, das Verhältnis von Realsituation und mathematischem Modell zu untersuchen. Insbesondere können die Voraussetzungen der Modellbildung bewußt gemacht werden, etwa die der Gleichwahrscheinlichkeit, der Unabhängigkeit usw. Einen wertvollen Dienst können dabei Modellbildungen leisten, die zu widersprüchlichen Ergebnissen führten (darunter

\*) Dieser Übergang entspricht meines Erachtens etwa dem Übergang vom "algebraischen" Rechnen mit Variablen zur Strukturalgebra.

klassische Paradoxa der Wahrscheinlichkeitsrechnung).

Ein anderes Ziel, das mit der weiteren Mathematisierung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes im Unterricht angestrebt werden kann, ist dieses: Es kann die Entwicklung eines mathematischen Begriffes, mit all der inhärenten Prozeßhaftigkeit und den damit verbundenen Veränderungen vorgeführt werden. Damit werden methodologische Kenntnisse über Mathematik vermittelt, was ja immer im Unterricht mit angestrebt werden muß, sollen nicht nur "Fachidioten" ausgebildet werden

Die genannten - zugegebenermaßenanspruchsvollen - Ziele werden durch die Behandlung von Mengenmodell und Axiomatik nicht automatisch erreicht. Sie erfordern bewußtes Anstreben, insbesondere müssen entsprechende Fragestellungen im Unterricht thematisiert werden. Dies spricht für einen theorieorientierten Unterricht. In den vorgegangenen Teilen war der Unterricht verfahrensorientiert, das Schwergewicht lag auf der Entwicklung von Methoden zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Neue Methoden in dieser Hinsicht wird der Schüler jetzt nicht lernen, er soll nur genauer erfahren, was Wahrscheinlichkeit ist. Ich glaube nicht, daß diese Grundlagenprobleme für einen etwa 15-jährigen Schüler zu schwierig sind. Es ist nur im Mathematikunterricht nicht üblich, sie so deutlich zu formulieren. Ihre Behandlung erscheint mir jedenfalls so leichter, als wenn Grundlagenprobleme am Beginn des jeweiligen Kapitels schnell "erledigt" werden.

Ereignishume eines Versuchs. Fragen nach den Grundlagen entstehen oft in Konfliktfällen, wenn Probleme auf Grund der bekannten und erprobten Verfahren nicht lösbar erschienen. Einige Fragen dieses Kapitels können an folgendem Beispiel demonstriert werden:

Aufgabe: Zwei Münzen werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei beiden Münzen "Zahl" kommt?

Zwei Schüler argumentieren unterschiedlich.

A: Es gibt drei Möglichkeiten: 1. "Zahl" kommt überhaupt nicht; 2. "Zahl" kommt einmal; 3. "Zahl" kommt zweimal. Daher ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zweimal "Zahl" kommt, gleich  $\frac{1}{3}$ .

B: Es gibt vier Möglichkeiten: ZZ, ZW, WZ, WW (ZZ bedeutet, daß beide Münzen Zahl zeigen; ZW bedeutet, daß die erste Münze Zahl, die zweite Wappen zeigt; usw.). Daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß zweimal "Zahl" kommt, gleich  $\frac{1}{4}$ . Führt eine Versuchsserie durch. Jeder Schüler wirft 2 Münzen 10-mal und notiert, wie oft dabei beide Münzen "Zahl" zeigen.

Die beiden Schüler sehen offenbar verschiedene "Gesamtheiten von Ausfällen". Die mathematische Beschreibung der beiden Lösungswege führt auf den Begriff des Ereignisraums. Der Argumentation von A liegt etwa die Menge  $\{0,1,2\}$ , jener von B die Menge  $\{ZZ, ZW, WZ, WW\}$  als Ereignisraum zugrunde. Dies ergibt sich aus folgender Definition:

Definition: Gegeben sei ein Versuch mit einer Gesamtheit von Ausfällen. Entspricht jeder Ausfall genau einem Element der Menge  $\Omega$  und umgekehrt, so nennt man  $\Omega$  einen Ereignisraum des Versuches.

Ereignisse können durch Teilmengen von Ereignisräumen beschrieben werden. In Beispielen können zu nicht zu komplizierten Versuchen Ereignisräume gebildet werden, wobei die Mehrdeutigkeit des Modellbildung bewußt werden sollte. Es ist nicht jedes Ereignis in jedem Ereignisraum beschreibbar. Als Ereignisräume für mehrstufige Versuche werden cartesische Produkte bzw. Teilmengen von solchen verwendet. (Die Elemente entsprechen Wegen in Baumdiagrammen).

Die Entsprechung zwischen Ereignis- und Mengenoperationen ist unproblematisch. Daß man schließlich Teilmengen des Ereignisraumes "Ereignisse" nennt, ist eine reine Bezeichnungsangelegenheit. So,

wie man nach Herstellung der Koordinatenabbildung vom Raum auf die Menge  $\mathbb{R}^3$  gewisse Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  "Geraden", andere "Ebenen" nennt usw. Damit ist das Mengenmodell eingeführt.

Axiomatische Wahrscheinlichkeitsdefinition. Es ist klar, daß eine rein mathematische Definition von Wahrscheinlichkeit nur auf der Basis des Ereignisraums keine eindeutigen Werte liefern kann:  $\Omega = \{0,1\}$  kann Ereignisraum eines Münzwurfes, eines Reißnagelwurfes, eines Ziehens aus einer Urne mit schwarzen und weißen Kugeln sein usw. Dementsprechend kann  $P(\{0\}) = \frac{1}{2}$ , 0,26 bzw.  $\frac{2}{3}$  sein. Man verzichtet auf die Eindeutigkeit und kommt zur axiomatischen Definition, indem man nach charakteristischen Eigenschaften des Begriffes sucht. Dabei ist zu beachten, daß Wahrscheinlichkeit - abstrakt gesehen - eine Funktion ist, die Ereignissen reelle Zahlen zuordnet. Ein ähnlicher Abstraktionsvorgang liegt vor, wenn man statt "Umfang einer bestimmten Figur" den Begriff "Umfang" an sich betrachtet.

Definition: Es sei  $\Omega$  ein Ereignisraum. Eine Funktion  $P$ , die jedem (betrachteten) Ereignis  $A \subseteq \Omega$  eine reelle Zahl  $P(A)$  zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsfunktion oder kurz Wahrscheinlichkeit, wenn gilt:

(W 1) Für jedes Ereignis  $A$  gilt:  $0 \leq P(A) \leq 1$

(W 2)  $P(\Omega) = 1$

(W 3) Sind  $A_1, A_2$  Ereignisse und gilt  $A_1 \cap A_2 = \{ \}$ , so gilt:

$$\underline{P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)}.$$

Die Allgemeinheit dieser Definition kann an einfachen bekannten Beispielen demonstriert werden. Ihr Vorteil liegt in der universellen Anwendbarkeit, ein Nachteil darin, daß sie nicht zu eindeutigen Werten führt. Zum besseren Verständnis dieses Sachverhaltes können Aufgaben der folgenden Art beitragen:

Aufgabe: Definiere drei verschiedene Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf dem Ereignisraum  $\Omega = \{a, b, c\}$ !

Aufgabe: Es sei  $\Omega = \{0, 1\}$ . Wir betrachten drei Wahrscheinlichkeitsfunktionen  $P_1, P_2$  und  $P_3$ :  $P_1: P_1(\{0\}) = \frac{4}{7}, P_1(\{1\}) = \frac{3}{7}$

$P_2: P_2(\{0\}) = 0, P_2(\{1\}) = 1$        $P_3: P_3(\{0\}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, P_3(\{1\}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Gib zu jeder dieser Wahrscheinlichkeitsfunktionen einen Versuch an, für den sie geeignet erscheint!

Es wird klar, wie Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf endlichen Ereignisräumen aussehen. "Wahrscheinlichkeit als relativen Anteil" erhält man als Spezialfall unter der Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit in einem endlichen Ereignisraum.

Folgerungen aus den Axiomen. Die Bedeutung der axiomatischen Wahrscheinlichkeitsdefinition nach Kolmogorow erschöpft sich nicht in ihrer Universalität. Wesentlich ist, daß sich darauf eine reichhaltige Theorie aufbauen läßt, in der viele grundlegende Sätze enthalten sind, insbesondere die Gesetze der großen Zahlen. In diesem Sinn erscheint es mir zweckmäßig, einige einfache Sätze aus den Axiomen herzuleiten. Dies festigt Bekanntes, bestätigt damit, daß das Axiomensystem gut gewählt war, ist eine Übung im Beweisen und erläutert das Arbeiten in einer axiomatischen Theorie. Damit keine falschen Vorstellungen aufkommen: Als vorläufigen Höhepunkt stelle ich mir etwa den Beweis der Formel  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$  vor.

Bedingte Wahrscheinlichkeiten. Die Additionsregel ist im neuen System ein Axiom geworden. Was ist mit der Multiplikationsregel? Kann man sie herleiten? Die Multiplikationsregel lautet mit Mengenoperationen angeschrieben:  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$ . Dabei ist aber  $P(B|A)$  im neuen System noch gar nicht definiert! Damit die Multiplikationsregel erhalten bleibt, definiert man daher:

Definition: Es sei  $\Omega$  ein Ereignisraum und  $P$  eine Wahrscheinlichkeit in  $\Omega$ . Weiters seien  $A, B \subseteq \Omega$  Ereignisse und  $P(A) > 0$ . Dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A gegeben durch  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .

Dies kann man natürlich auch unter Rückgriff auf relative Anteile und relative Häufigkeiten motivieren. Jedenfalls wird bedingte Wahrscheinlichkeit in diesem System auf Wahrscheinlichkeit zurückgeführt und ist kein Grundbegriff \*).

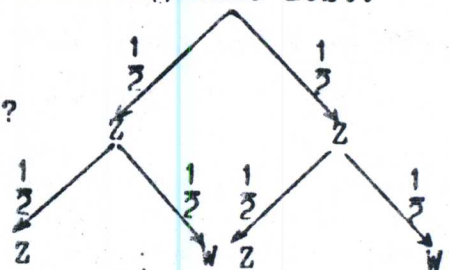
Welche Annahmen werden bei Wahrscheinlichkeitsberechnungen getroffen? Wir wollen diese Frage anhand des oben erwähnten Beispiels von der unterschiedlichen Berechnung der Wahrscheinlichkeit für

"zweimal Zahl" beim Werfen zweier Münzen diskutieren. A erhält  $\frac{1}{3}$ , B erhält  $\frac{1}{4}$  als Wahrscheinlichkeit. Das Resultat von B erhält man auch, wenn man die Aufgabe mittels eines Baumdiagramms löst:

$$P(ZZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Welcher Ereignisraum liegt hier zugrunde?

Offenbar:  $\Omega_B = \{ZZ, ZW, WZ, WW\}$ .



A könnte einwenden: Es gibt ja keine erste und zweite Münze! Daher kann ich zwischen ZW und WZ gar nicht unterscheiden. B darauf: Wir könnten die Münzen ja kennzeichnen, etwa färben. Es ist nicht anzunehmen, daß sich dadurch die Wahrscheinlichkeiten ändern.

\*) Es gibt ein von A. Renyi stammendes Axiomensystem, in dem bedingte Wahrscheinlichkeit als Grundbegriff aufscheint und daher die Multiplikationsregel als Axiom. (Siehe [Renyi 1973])

Welche weiteren Annahmen liegen dem Baumdiagramm zugrunde?

Wir betrachten die Ereignisse:

$Z_1$ : Bei der ersten Münze "Zahl" =  $\{ZZ, ZW\}$

$W_1$ : Bei der ersten Münze "Wappen" =  $\{WZ, WW\}$

$Z_2$ : Bei der zweiten Münze "Zahl" =  $\{ZZ, WZ\}$

$W_2$ : Bei der zweiten Münze "Wappen" =  $\{ZW, WW\}$ .

Die Zahleneinträge im Baumdiagramm bedeuten nun:  $P(Z_1) = P(W_1) = \frac{1}{2}$ ;

$P(Z_2|Z_1) = P(W_2|Z_1) = \frac{1}{2}$ ;  $P(Z_2|W_1) = P(W_2|W_1) = \frac{1}{2}$

Dies sind Gleichheitsannahmen über Wahrscheinlichkeiten und bedingte Wahrscheinlichkeiten. Daraus folgt dann:

$P(Z_1 \cap Z_2) = P(Z_1) \cdot P(Z_2|Z_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  usw. Wir könnten auch folgende Annahmen treffen:

$$P(Z_1) = P(W_1) = \frac{1}{2} \text{ und } P(Z_2) = P(W_2) = \frac{1}{2}$$

sowie, daß  $Z_1$  und  $Z_2$  bzw.  $Z_1$  und  $W_2$  bzw.  $W_1$  und  $Z_2$  bzw.  $W_1$  und  $W_2$  jeweils unabhängig sind (Kurz: Die Ereignisse der ersten Stufe sind unabhängig von denen der zweiten Stufe). Dann gilt z.B.

$$P(Z_1 \cap Z_2) = P(Z_1) \cdot P(Z_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Wir sehen: Wir können das Resultat von B durch einleuchtende Annahmen begründen. Die Annahme, die A trifft, nämlich Gleichwahrscheinlichkeit in  $\Omega_A = \{0,1,2\}$  kann nicht weiter begründet werden. Führt man eine Versuchsserie durch, so wird sich das Ergebnis von B als eher gestützt herausstellen (bei genügend vielen Versuchen).

Derartige Überlegungen sollten anhand von Aufgaben vertieft werden.

Aufgabe: Ein Würfel werde zweimal geworfen. Die Summe der Augenzahlen kann 2,3,4,...,12 betragen. Wäre im Ereignisraum  $\{2,3,4,\dots,12\}$  die Annahme der Gleichwahrscheinlichkeit gerechtfertigt?

In diesem Zusammenhang paßt auch die "Aufgabe von Galilei". (Sie soll dem berühmten Naturforscher vom Fürsten der Toskaner gestellt worden sein):

Aufgabe: Warum erscheint beim Wurf dreier Würfel die Summe 10 öfter als die Summe 9, obwohl beide Summen auf 6 Arten eintreten können:  $9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 1+4+4 = 2+2+5 = 2+3+4 = 3+3+3$

$$10 = 1+3+6 = 1+4+5 = 2+2+6 = 2+2+4 = 2+3+5 = 3+3+4$$

Will man auch geometrische Wahrscheinlichkeiten behandeln, so bietet sich etwa das Bertrandsche Paradoxon zur Demonstration nicht eindeutiger Modellbildung an. In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, daß Unklarheiten hinsichtlich von Versuchsanordnungen sehr schnell beseitigt werden können, indem man sich überlegt, wie man den Versuch mit Hilfe von Zufallsziffern simulieren könnte.

Bei all diesen Schwierigkeiten mit mathematischer Modellbildung sollte immer darauf hingewiesen werden, daß bei allen praktischen Aufgaben die letzte entscheidende Instanz die Empirie, also der Versuch, sein muß.

Noch einmal: Was ist Wahrscheinlichkeit? Wir haben diese Frage bereits einmal gestellt und so beantwortet: Wahrscheinlichkeit ist eine Maßzahl, die realen Ereignissen nach gewissen Regeln zugeordnet wird - ähnlich einer physikalischen Größe. Diese Maßzahl drückt den Grad der Erwartung aus, daß das Ereignis eintritt. Eine empirische Überprüfung kann mit Hilfe der Regel "Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit" erfolgen.

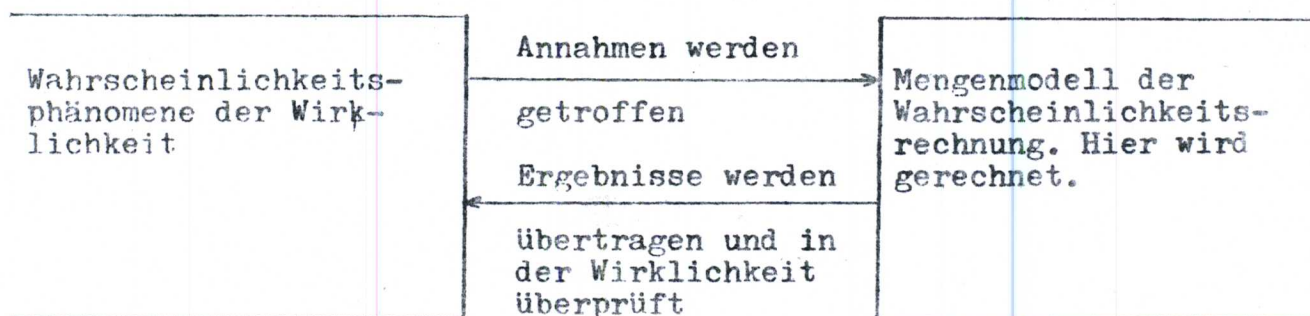
Nun haben wir eine mathematische Definition von Wahrscheinlichkeit kennengelernt. Wir haben sie erhalten, indem wir wichtige Eigenschaften des "physikalischen" Wahrscheinlichkeitsbegriffes als Axiome formuliert haben. Diese Definition liefert zwar keine eindeutigen Werte, läßt sich aber auf viele Spezialfälle anwenden, und es lassen sich grundlegende Sätze über Wahrscheinlichkeiten daraus herleiten.



Die axiomatische Wahrscheinlichkeitsdefinition bezieht sich nicht direkt auf reale Ereignisse. Sie bezieht sich auf Ereignisse (d.h. Teilmengen) in einem Ereignisraum. Der Ereignisraum und seine Teilmengen stellen ein Modell der Wirklichkeit dar. Mathematische Modelle werden zwar so konstruiert, daß sie die Wirklichkeit möglichst gut beschreiben, sie sind aber nicht mit ihr identisch.

Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten im Modell müssen Annahmen getroffen werden.

Ob die jeweiligen Annahmen gerechtfertigt sind, d.h. der "Wirklichkeit" \*) entsprechen, kann im mathematischen Modell nicht entschieden werden, sondern muß z.B. durch Versuche überprüft werden.



Mit der axiomatischen Wahrscheinlichkeitsdefinition ist die Frage "Was ist Wahrscheinlichkeit" nicht endgültig beantwortet. Es bleibt ja die Frage, was Wahrscheinlichkeit in der Wirklichkeit bedeutet, d.h. wie man zu Annahmen über Wahrscheinlichkeitswerte kommt und wie Wahrscheinlichkeitsaussagen in der Wirklichkeit zu interpretieren sind. Einen Anhaltspunkt bietet die Regel "Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit". Sie ist aber nicht immer anwendbar, z.B. dann nicht, wenn Versuche nicht wiederholbar sind. Man spricht daher von einer par-

\*)

Mathematische Modelle sind natürlich nicht "unwirklich". Mit Wirklichkeit ist hier jener Bereich gemeint, mit dem wir unmittelbar zu tun haben, den wir direkter erfassen können (etwa durch die Sinne) als auf dem Umweg über theoretische Begriffsbildungen. Der Unterschied ist nicht prinzipiell, sondern nur graduell. Theoretische Modelle sind bei jedem Beobachtungs- und Erkenntnisprozeß immer schon vorausgesetzt. Der Philosoph Immanuel Kant (1724-1804) nannte diesen immer schon vorausgesetzten Anteil der Erkenntnis das a priori.

tiellen Deutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Eine andere partielle Deutung wäre die: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses gibt an, in welchem Verhältnis jemand auf das Eintreten eines Ereignisses zu wetten bereit ist. Es sind viele partielle Deutungen des Wahrscheinlichkeitsbegriffes denkbar. Eine einheitliche, alle Spezialfälle umfassende Deutung, die es außerdem gestattet, Werte der Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, ist noch nicht gefunden worden und wahrscheinlich (!) auch nicht möglich.

#### 4. Was ist für den skizzierten Lehrgang charakteristisch?

. Ausgangspunkt ist ein in Realsituationen verankerter Wahrscheinlichkeitsbegriff. Nach bestimmten Zuordnungsregeln werden realen Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet.

. Es stehen zwei Zuordnungsregeln basierend auf "relativem Anteil" und "relativer Häufigkeit" einander gegenüber. Es wird zunächst die Konsistenz nicht problematisiert. (Von einem abstrakteren Wahrscheinlichkeitsbegriff her gesehen, handelt es sich um "partielle Deutungen")

. Auf der Basis des "physikalischen" Wahrscheinlichkeitsbegriffes wird mit Wahrscheinlichkeiten gerechnet (nicht mit Anzahlen). Auf Kombinatorik wird zunächst verzichtet.

. Dabei wird zunächst "lokal" gearbeitet, d.h. keine globale Strukturierung der jeweiligen Realsituation durchgeführt.

. Die globale Strukturierung erfolgt später durch Mengenmodell und axiomatische Wahrscheinlichkeitsdefinition. Deren Hauptzweck liegt in der Möglichkeit der Untersuchung des Verhältnisses von Realität und Mathematik. Die Voraussetzungen der Modellbildungen werden untersucht

. An verschiedenen Stellen wird über den Wahrscheinlichkeitsbegriff philosophiert. Nach Möglichkeit werden dazu auch Aufgaben gestellt.

Ein weiterer Ausbau des Kurses sollte zu grundlegenden Verfahren der beurteilenden Statistik führen.

L I T E R A T U R

- H. Bürger, R. Fischer, G. Malle: Mathematik Oberstufe 3.  
Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1980.
- H. Dinges: Zum Unterricht der Wahrscheinlichkeitsrechnung.  
Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 23 (1976) 86-109.
- H. Dinges: Schwierigkeiten mit der Bayesschen Regel.  
Mathematisch-Physikalische Semesterberichte 25 (1978) 113-156.
- A. Engel: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.  
Bd. I, 1975; Bd. II, 1976. Klett, Stuttgart.
- E. Fischbein: The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking Children.  
Reidel, Dordrecht 1975.
- H. Freudenthal: The Crux of Course Design in Probability.  
Educational Studies in Mathematics 5 (1973/74), 261-277.
- D. Heitele: Didaktische Ansätze zum Stochastikunterricht in Grund-  
schule und Förderstufe.  
Diss. Pädagogische Hochschule Dortmund 1976.
- A. Renyi: Wahrscheinlichkeitsrechnung (mit einem Anhang über Infor-  
mationstheorie).  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1973.
- A. Renyi: Briefe über die Wahrscheinlichkeit.  
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972.
- G. Schrage: Schwierigkeiten mit stochastischer Modellbildung.  
Zwei Beispiele aus der Praxis.  
Journal für Mathematik-Didaktik 1 (1980) 86-101.
- W. Stegmüller: Personelle und statistische Wahrscheinlichkeit.  
2. Halbband: Statistisches Schließen, statistische Begrün-  
dung, Statistische Analyse. Springer 1973.
- H. Steinbring: Zur Entwicklung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs -  
Benoullis Theorem aus didaktischer Sicht.  
Journal für Mathematik-Didaktik 3 (1980).